ББК 22.21
Т 33
УДК 531.8

Л. И. Котова, Р. И. Надеева, С. М. Тарг,
В. Л. Цывильский, И. М. Шмарова

Теоретическая механика: Методические указания
Т 33 и контрольные задания для студентов-заочников машиностроительных, строительных, транспортных, приборостроительных специальностей высших учебных заведений/Л. И. Котова, Р. И. Надеева, С. М. Тарг и др.; Под ред. С. М. Тарга — 4-е изд. — М.: Высш. шк., 1989. — 111 с.: ил.

Т $\frac{1603020000(4309000000)-384}{001(01)-89}$ 105—89

ББК 22.21
531

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

В курсе теоретической механики студенты изучают три ее раздела: статику, кинематику и динамику.

1. Для изучения курса необходимо иметь соответствующую математическую подготовку. Во всех разделах курса, начиная со статики, широко используется векторная алгебра. Необходимо уметь вычислять проекции векторов на координатные оси, находить геометрически (построением векторного треугольника или многоугольника) и аналитически (по проекциям на координатные оси) сумму векторов, вычислять скалярное и векторное произведения двух векторов и знать свойства этих произведений, а в кинематике и динамике — дифференцировать векторы. Надо также уметь свободно пользоваться системой прямоугольных декартовых координат на плоскости и в пространстве, знать, что такое единичные векторы (орты) этих осей и как выражаются составляющие вектора по координатным осям с помощью ортов.

Для изучения кинематики надо совершенно свободно уметь дифференцировать функции одного переменного, строить графики этих функций, быть знакомым с понятиями о естественном трехграннике, кривизне кривой и радиусе кривизны, знать основы теории кривых 2-го порядка, изучаемой в аналитической геометрии.

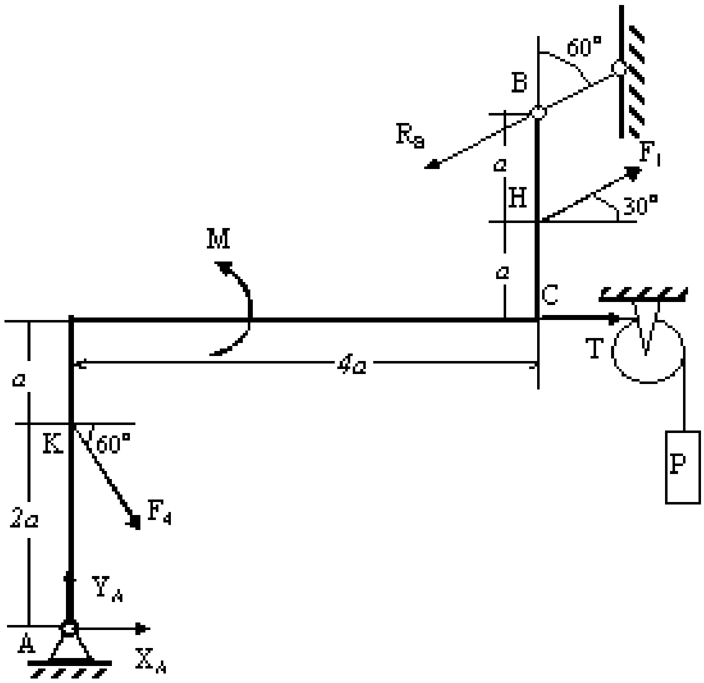
Для изучения динамики надо уметь находить интегралы (неопределенные и определенные) от простейших функций, вычислять частные производные и полный дифференциал функций нескольких переменных, а также уметь интегрировать дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными и линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка (однородные и неоднородные) с постоянными коэффициентами.

2. При изучении материала курса по учебнику нужно прежде всего уяснить существо каждого излагаемого там вопроса. Главное — это понять изложенное в учебнике, а не «заучить».

Изучать материал рекомендуется по темам (пунктам приводимой ниже программы) или по главам (параграфам) учебника. Сначала следует прочитать весь материал темы (параграфа), особенно не задерживаясь на том, что показалось не совсем понятным; часто это становится понятным из последующего. Затем надо вернуться к местам, вызвавшим затруднения, и внимательно разобраться в том, что было неясно. Особое внимание при повторном чтении обратите на формулировки

ЗАДАНИЕ С1–00

Дано: Р=25 кН, М=100 кНм, $F_1 = 10$ кН,
$F_4 = 40$ кН, a==0,5 м.
Найти: Реакции связей в т. А и В



РЕШЕНИЕ:

Рассмотрим равновесие жесткой рамы. На раму действуют силы: силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_4$, пара сил с моментом M, натяжение троса $\vec{T}$ $(T = P)$ и реакции связей $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{R}_B$.

Неизвестны реакции связей $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{R}_B$.

Для полученной плоской системы сил составим три уравнения равновесия:

уравнение моментов относительно т.А

$\Sigma m_A = 0$,

$M - 2aF_4\cos 60° - 4aF_1\cos 30° + 4aF_1\sin 30° - 3aT - 4aR_B\cos 60° + 5aR_B\sin 60° = 0$, отсюда

$$R_B = \frac{\frac{M}{a} - 2F_4\cos 60° + 4F_1(\sin 30° - \cos 30°) - 3T}{4\cos 60° - 5\sin 60°} =$$

$$= \frac{\frac{100}{0,5} - 2\cdot 40\cdot 0,5 + 4\cdot 10(0,5 - 0,866) - 3\cdot 25}{4\cdot 0,5 - 5\cdot 0,866} = \mathbf{-30,2}$$ (кН) – действительное направление реакции противоположно принятому на рисунке;

уравнения проекций на оси координат

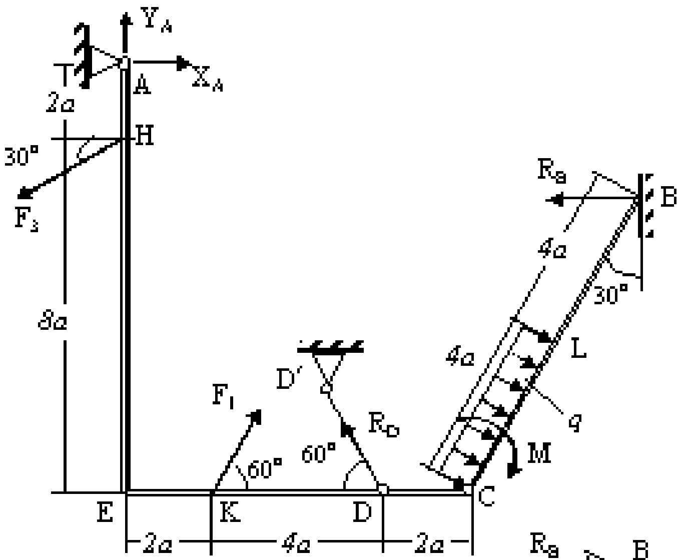
$\Sigma F_x = 0$, $X_A + F_4\cos 60° + F_1\cos 30° + T - R_B\sin 60° = 0$, отсюда

$X_A = R_B\sin 60° - T - F_4\cos 60° - F_1\cos 30° = -30,2\cdot 0,866 - 25 - 40\cdot 0,5 - 10\cdot 0,866 = \mathbf{-79,8}$ (кН) – действительное направление реакции противоположно принятому на рисунке;

$\Sigma F_y = 0$, $Y_A - F_4\sin 60° + F_1\sin 30° - R_B\cos 60° = 0$, отсюда

$Y_A = F_4\sin 60° - F_1\sin 30° + R_B\cos 60° = 40\cdot 0,866 - 10\cdot 0,5 - 30,2\cdot 0,5 = \mathbf{14,5}$ (кН).

ЗАДАНИЕ С2-00



Дано: M=60 кНм, q=20 кН/м, a=0,2 м, F_1=10 кН, F_3=30 кН.

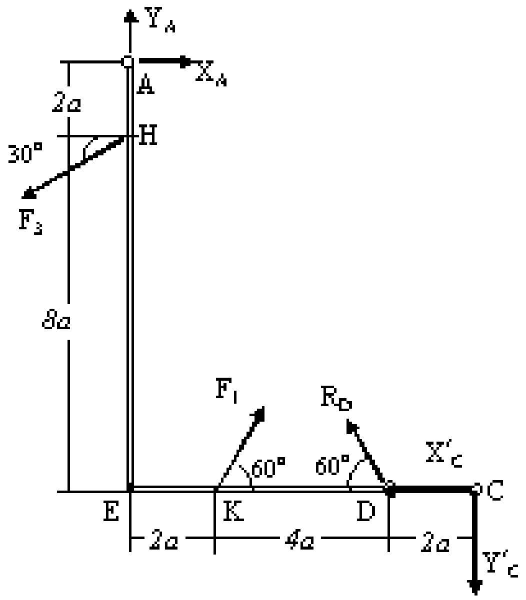
Найти: Найти реакции связей в т. А, В,С.

РЕШЕНИЕ:

Для определения реакций расчленим систему и рассмотрим вначале равновесие стержня ВС.

На стержень действуют равномерно распределенной в середине участка LC ($Q = q \cdot 4a$=16 кН), пара сил с моментом M, реакция опорной поверхности R_B и составляющие X_C, Y_C реакции шарнира С.

Для полученной плоской системы сил составляем уравнения равновесия:

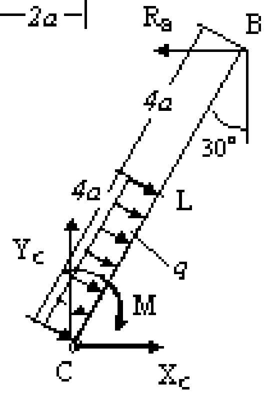


$$\Sigma m_C(\vec{F}_k) = 0\,;$$

$$-M - Q \cdot 2a + R_B \cdot 8a\cos 30° = 0\,,$$

$$R_B = \frac{M + 2aQ}{8a\cos 30°} = \frac{60 + 2 \cdot 0{,}2 \cdot 16}{8 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}866}$$

= =**47,9**(кН);



$$\Sigma \vec{F}_{kx} = 0\,;$$

$$X_C + Q\cos 30° - R_B = 0\,,$$

$X_C = -Q\cos 30° + R_B = -16 \cdot 0{,}866 + 47{,}9 =$ **29,4** (кН);

$\Sigma \vec{F}_{ky} = 0$; $Y_C - Q\sin 30° = 0$, $Y_C = Q\sin 30° = 16 \cdot 0{,}5 =$ **8** (кН).

Теперь рассмотрим равновесие угольника АЕС. На него действует силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_3$, составляющие реакции шарнира С X'_C, Y'_C (направлены противоположно X_C, Y_C и численно $X'_C = X_C$, $Y'_C = Y_C$) и реакция шарнира А ($\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$).

Для этой плоской системы сил тоже составим уравнения равновесия: $\Sigma m_A(\vec{F}_k) = 0$;

$$-F_3\cos 30° \cdot 2a + F_1\cos 60° \cdot 10a + F_1\sin 60° \cdot 2a - Y'_C \cdot 8a - X'_C \cdot 10a - R_D\cos 60 \cdot 10a + R_D\sin 60 \cdot 6a = 0$$

$$R_D = \frac{-2F_3\cos 30° + F_1(10\cos 60° + 2\sin 60°) - Y'_C \cdot 8 - X'_C \cdot 10}{10\cos 60 - 6\sin 60} =$$

$$= \frac{-2 \cdot 30 \cdot 0{,}866 + 10(10 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 0{,}866) - 8 \cdot 8 - 29{,}4 \cdot 10}{10 \cdot 0{,}5 - 6 \cdot 0{,}866} = \mathbf{1748}\text{(кН)}.$$

$\Sigma \vec{F}_{kx} = 0$; $X_A - X'_C + F_1\cos 60° - F_3\cos 30° - R_D\cos 60° = 0$,

$X_A = X'_C - F_1\cos 60° + F_3\cos 30° + R_D\cos 60° = 29{,}4 - 10 \cdot 0{,}5 + 30 \cdot 0{,}866 + 1748 \cdot 0{,}5 =$ **924,4**(кН);

$\Sigma \vec{F}_{ky} = 0$; $Y_A - Y'_C + F_1\sin 60° - F_3\sin 30° + R_D\sin 60° = 0$,

$Y_A = Y'_C - F_1\sin 60° + F_3\sin 30° - R_D\sin 60° = 8 - 10 \cdot 0{,}866 + 30 \cdot 0{,}5 - 1748 \cdot 0{,}866 =$ **–1499,4**(кН) – действительное направление составляющей противоположно принятому на рисунке;

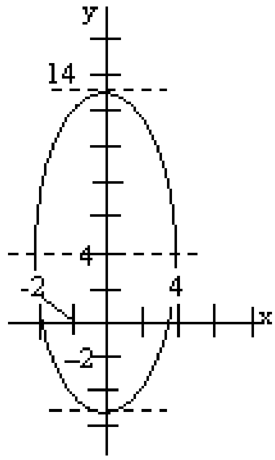
R_D	X_A	Y_A	R_B	X_C	Y_C
кН					
1748	924,4	–1499,4	47,9	29,4	8

ЗАДАНИЕ К1-00

Дано: уравнения движения точки в плоскости xy: $x = 4\sin\frac{\pi t}{6}$, $y = 4 - 9\cos\frac{\pi t}{6}$; $t_1 = 1$ с.

Найти: уравнение траектории точки; скорость и ускорение, касательное и нормальное ускорение и радиус кривизны траектории в момент $t = t_1$.

РЕШЕНИЕ:



1. Уравнение траектории. Для определения уравнения траектории точки исключим время t из заданных уравнений движения.

Воспользуемся свойством тригонометрических функций $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Тогда

$\left(\sin\frac{\pi t}{6}\right)^2 = \left(\frac{x}{4}\right)^2$, $\left(\cos\frac{\pi t}{6}\right)^2 = \left(\frac{4-y}{9}\right)^2$ и $\frac{x^2}{16} + \frac{(4-y)^2}{81} = 1$. Это уравнение эллипса: малая полуось равна 4, а большая - 9.

2. Скорость точки. Скорость найдем по ее проекциям на координатные оси: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, где

$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi t}{6}$, $v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{3\pi}{2}\sin\frac{\pi t}{6}$. При $t = t_1$=1 с

$v_x = \frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi = 1{,}81$ (см/с), $v_y = \frac{3\pi}{2}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{4} = 2{,}36$ (см/с),

$$v = \sqrt{1{,}81^2 + 2{,}36^2} = 2{,}97 \text{ (см/с)}.$$

3. Ускорение точки. Находим аналогично: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$,

$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\frac{\pi^2}{9}\sin\frac{\pi t}{6}$, $a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{\pi^2}{4}\cos\frac{\pi t}{6}$ и при $t = t_1$=1 с

$a_x = -\frac{\pi^2}{9}\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{\pi^2}{18} = -0{,}55$ (см/с²), $a_y = \frac{\pi^2}{4}\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\pi^2\sqrt{3}}{8} = 2{,}14$ (см/с²),

$a = \sqrt{0{,}55^2 + 2{,}14^2} = 2{,}21$ (см/с²).

4. Касательное ускорение. Найдем, дифференцируя равенство $v^2 = v_x^2 + v_y^2$. Получим

$2v\frac{dv}{dt} = 2v_x\frac{dv_x}{dt} + 2v_y\frac{dv_y}{dt}$, откуда $a_\tau = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v}$ и при $t = t_1$=1 с

$a_\tau = \frac{-1{,}81\cdot 0{,}55 + 2{,}36\cdot 2{,}14}{2{,}97} = 1{,}37$ (см/с²).

5. Нормальное ускорение. $a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{2{,}21^2 - 1{,}37^2} = 1{,}74$ (см/с²).

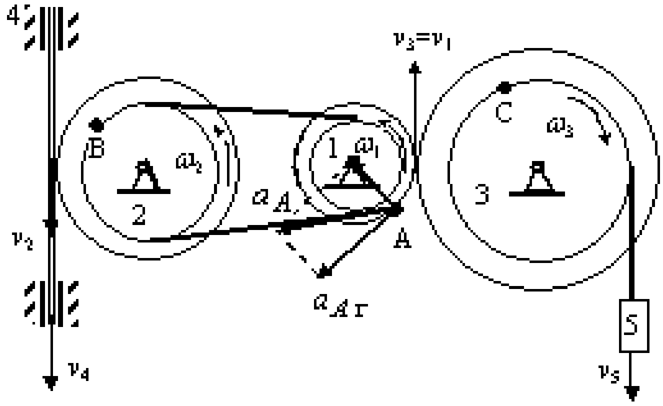
6. Радиус кривизны траектории. $\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{2{,}97^2}{1{,}74} = 5{,}07$ (см).

v	a	a_τ	a_n	ρ
см/с	см/с²			см
2,97	2,21	1,37	1,74	5,07

ЗАДАНИЕ К2–00

Дано: r_1= 2 см, R_1= 4 см, r_2= 6 см, R_2= 8 см, r_3= 12 см, R_3= 16 см, $s_4 = 4(7t - t^2)$, t_1=2 с.

Найти: скорости v_C, v_B, ускорения ε_2, a_A, a_5.



РЕШЕНИЕ:

Скорости точек, лежащих на ободах колес радиуса R_i, обозначим через v_i, а точек, лежащих на ободах колес радиуса r_i, через u_i.

Угловые скорости всех колес.

$v_4 = 4(7-2t)$. Т.к. $v_4 = v_2 = \omega_2 R_2$, то $\omega_2 = \frac{4}{R_2}(7-2t)$.

Т.к. колеса 1 и 2 связаны ременной передачей, то $u_1 = u_2$ или $\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$ и $\omega_1 = 4\frac{r_2}{R_2 r_1}(7-2t)$. Колеса 1 и 3 находятся в зацеплении, следовательно, $v_3 = v_1$, то есть $\omega_3 R_3 = \omega_1 R_1$ и отсюда $\omega_3 = 4\frac{R_1 r_2}{r_1 R_2 R_3}(7-2t)$.

Скорости v_C, v_B.

$v_C = u_3 = \omega_3 r_3 = 4\frac{R_1 r_2 r_3}{r_1 R_2 R_3}(7-2t)$, $v_B = u_2 = \omega_2 r_2 = 4\frac{r_2}{R_2}(7-2t)$.

При t_1=2 с $v_C = 4\frac{4\cdot 6\cdot 12}{2\cdot 8\cdot 16}(7-4)$ =13,5 (см/с), $v_B = 4\frac{6}{8}(7-4)$ =9 (см/с).

Угловое ускорение ε_2. $\varepsilon_2 = \dot\omega_2$, следовательно $\varepsilon_2 = -\frac{8}{R_2}t = -\frac{8}{8}2 = -1$ (1/с²).

Ускорение a_A. Для т.A $\vec a_A = \vec a_{A\tau} + \vec a_{An}$, где $a_{A\tau} = R_1\varepsilon_1$, $a_{An} = R_1\omega_1^2$. Угловое ускорение $\varepsilon_1 = \dot\omega_1 = -8\frac{r_2}{R_2 r_1}t = -8\frac{6}{8\cdot 2}2 = -6$ (1/с²). Таким образом при t_1=2 с

касательная составляющая $a_{A\tau} = -4\cdot 6 = -24$ (см/с²),

нормальная составляющая $a_{An} = R_1\left[4\frac{r_2}{R_2 r_1}(7-2t)\right]^2 = 4\left[4\frac{6}{8\cdot 2}(7-4)\right]^2 = 81$ (см/с²),

полное ускорение $a_A = \sqrt{a_{A\tau}^2 + a_{An}^2} = \sqrt{24^2 + 81^2} = 84{,}5$ (см/с²).

Ускорение a_5. Т.к. груз 5 совершает поступательное движение, то $a_5 = \dot v_5 = \dot u_3 = \dot\omega_3 r_3 = -8\frac{R_1 r_2 r_3}{r_1 R_2 R_3}t$. Тогда $a_5 = -8\frac{4\cdot 6\cdot 12}{2\cdot 8\cdot 16}2 = -18$ (см/с²).

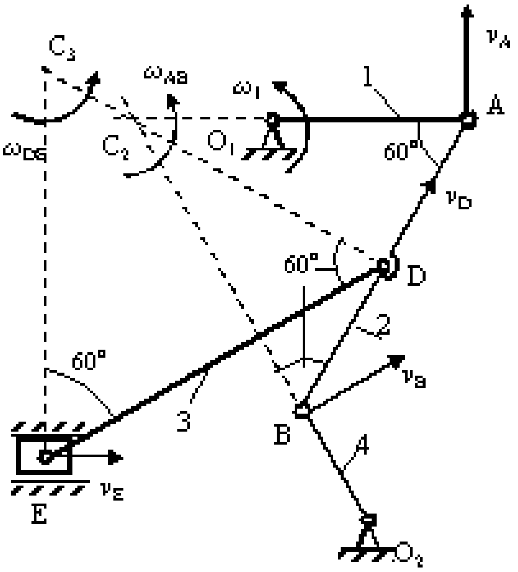
v_B	v_C	ε_2	a_A	a_5
см/с		1/с²	см/с²	
9	13,5	–1	84,5	–18

ЗАДАНИЕ К3-00

Дано: $\alpha = 0°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 30°$, $\varphi = 0°$, $\theta = 120°$, ω_1=6 1/с, АД=ВД, $\ell_1 = 0{,}4$ м, $\ell_2 = 1{,}2$ м, $\ell_3 = 1{,}4$ м, $\ell_4 = 0{,}6$ м.

Найти: скорости v_B, v_E, ω_{DE}, ускорения a_B и ε_{AB}

РЕШЕНИЕ:



Скорость т.А $v_A = \omega_1 \ell_1 = 6 \cdot 0{,}4$=2,4 (м/с), $v_A \perp O_1A$ в сторону вращения.

Определение v_B**.** Зная направления v_A и v_B (перпендикулярно кривошипам O_1A и O_2B) найдем положение МЦС звена АВ (т.C_2). Тогда

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{C_2A} = \frac{v_B}{C_2B} = \frac{v_D}{C_2D} \qquad (1)$$

и отсюда $v_B = v_A \dfrac{C_2B}{C_2A}$. Определим C_2A и C_2B. Из построения МЦС следует, что ΔABC_2 – равносторонний (все углы равны 60°). Т.е. $C_2B = C_2A = AB = \ell_2$. Следовательно

$$v_B = v_A = 2{,}4 \text{ (м/с)}.$$

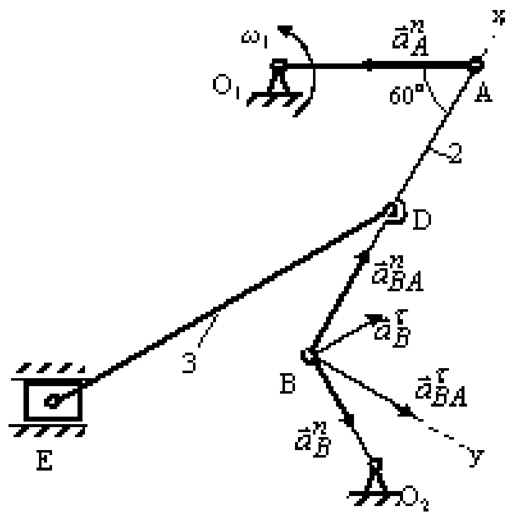
Определение v_E**.** Найдем сначала скорость т.Д из соотношения (1): $v_D = v_A \dfrac{C_2D}{C_2A}$. Из рисунка следует, что $C_2D = \ell_2 \cdot \cos 30°$. Отсюда $v_D = v_A \cos 30° = 2{,}4 \cdot 0{,}866 = 2{,}08$ (м/с). Вектор скорости v_D направлен в соответствии с угловой скоростью вращения звена АВ (здесь вдоль ВА). Точки Д и Е принадлежат одному звену ДЕ. Воспользуемся теоремой о проекциях скоростей двух точек тела на прямую, соединяющие эти точки (проекции скоростей должны иметь одинаковые знаки и быть равными), согласно которой

$$v_E \cos 30° = v_D \cos 30°, \text{ т.е. } v_E = v_D = 2{,}08 \text{ (м/с)}.$$

Определение ω_{DE}**.** Для определения ω_{DE} найдем положение МЦС звена ДЕ (т.C_3). Тогда $\omega_{DE} = \dfrac{v_D}{C_3D} = \dfrac{v_E}{C_3E}$. ΔDEC_3 – равносторонний. Тогда $C_3E = C_3D = DE = \ell_3$ и

$$\omega_{DE} = \frac{v_E}{\ell_3} = \frac{2{,}08}{1{,}4} = 1{,}48 \text{ (1/с)}.$$

Определение a_B **и** ε_{AB}**.** Точка В принадлежит звену АВ. Чтобы найти a_B найдем сначала ускорение т. А: $\vec{a}_A = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n$. $a_A^\tau = 0$ (равномерное вращение) и $a_A = a_A^n = \omega_1^2 \ell_1 = 6^2 \cdot 0{,}4 = 14{,}4$ (м/с²).



Так как т.В движется по окружности, то $\vec{a}_B = \vec{a}_B^\tau + \vec{a}_B^n$ и

$$\vec{a}_B^\tau + \vec{a}_B^n = \vec{a}_A^n + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{BA}^n \qquad (2)$$

Направления векторов: $\vec{a}_B^\tau \perp BO_2$ (пока произвольно), $\vec{a}_B^n$ – вдоль BO_2 от В к O_2 (численно $a_B^n = \dfrac{v_B^2}{\ell_4} = \dfrac{2{,}4^2}{0{,}6}$=9,6 м/с²), $\vec{a}_A^n$ – вдоль AO_1 от А к O_1, $\vec{a}_{BA}^\tau \perp BA$ (пока произвольно), $\vec{a}_{BA}^n$ – вдоль ВА от В к А (численно $a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot \ell_2$). Из соотношения (1) $\omega_{AB} = \dfrac{v_A}{C_2A} = \dfrac{v_A}{\ell_2} = \dfrac{2{,}4}{1{,}2} = 2$ (1/с) и

$a^n_{BA} = 2^2 \cdot 1,2 = 4,8$ (м/с²). Для определения $\vec{a}^\tau_B$ и $\vec{a}^\tau_{BA}$ спроектируем обе части равенства на оси координат: ось x – вдоль ВА, $y \perp$ ВА.

ось x: $\quad a^\tau_B \cos 30° - a^n_B \cos 60° = a^n_{BA} - a^n_A \cos 60°$

ось y: $\quad a^\tau_B \sin 30° + a^n_B \sin 60° = a^\tau_{BA} - a^n_A \sin 60°$

Из первого уравнения найдем $\vec{a}^\tau_B$:

$$a^\tau_B = \frac{a^n_{BA} - a^n_A \cos 60° + a^n_B \cos 60°}{\cos 30°} = \frac{4,8 - (14,4 - 9,6) \cdot 0,5}{0,866} = 2,77 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Тогда ускорение т.В равно

$$a_B = \sqrt{\left(a^\tau_B\right)^2 + \left(a^n_B\right)^2} = \sqrt{2,77^2 + 9,6^2} = 10 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Из второго уравнения найдем $\vec{a}^\tau_{BA}$:

$$a^\tau_{BA} = (a^n_B + a^n_A)\sin 60° + a^\tau_B \sin 30° = (9,6 + 14,4) \cdot 0,866 + 2,77 \cdot 0,5 = 22,2 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Из равенства $a^\tau_{BA} = \varepsilon_{AB} \cdot \ell_2$ получим

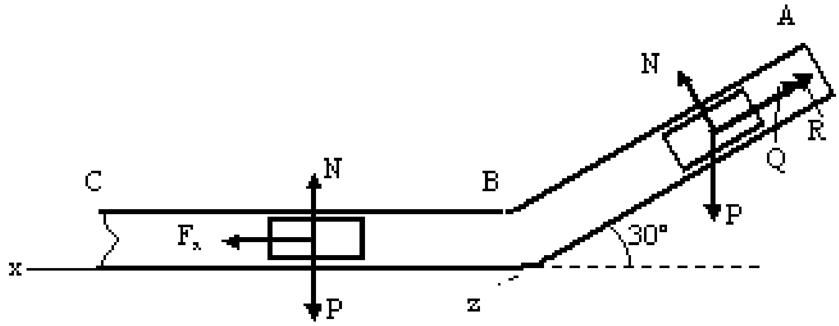
$$\varepsilon_{AB} = \frac{\left|a^\tau_{BA}\right|}{\ell_2} = \frac{22,2}{1,2} = 18,5 \text{ (1/с}^2\text{)}.$$

ЗАДАНИЕ Д1-00

<u>Дано</u>: m =2,4 кг, v_0 =12 м/с, Q=5 Н, R= $0{,}8v^2$ Н, ℓ=1,5 м, $F_x = 4\sin 4t$ Н.

<u>Найти</u>: $x = f(t)$ - закон движения груза на участке ВС

РЕШЕНИЕ:



1) Рассмотрим движение груза на участке АВ, считая груз материальной точкой. На груз действуют сила тяжести $\vec{P} = m\vec{g}$, реакция стенки $\vec{N}$ постоянная сила $\vec{Q}$ и сила сопротивления $\vec{R} = 0{,}8v^2$. Проведем ось Oz вдоль АВ. Составим дифференциальное уравнение движение в проекции на эту ось: $m\dfrac{dv_z}{dt} = \sum F_{iz}$ или $mv_z\dfrac{dv_z}{dz} = -Q - R + P\sin 30$.

Перепишем это уравнение с учетом того, что $v_z = v$: $v\dfrac{dv}{dz} = \dfrac{0{,}8}{m}\left(\dfrac{mg\sin 30 - Q}{0{,}8} - v^2\right)$. Обозначим $a = \dfrac{0{,}8}{m} = \dfrac{0{,}8}{2{,}4} = 1/3\,(м^{-1})$ и $q = \dfrac{mg\sin 30 - Q}{0{,}8} = \dfrac{2{,}4\cdot 10\cdot 0{,}5 - 5}{0{,}8} = 8{,}75\,(м^2/с^2)$. Тогда $v\dfrac{dv}{dz} = a(q - v^2)$, разделяя переменные $\dfrac{2vdv}{v^2 - q} = -2adz$ интегрируем: $\ln(v^2 - q) = -2az + C_1$.

Постоянную C_1 находим по начальным условиям: при $z = 0$ $v = v_0$, что дает $C_1 = \ln(v_0^2 - q)$. Следовательно $\ln(v^2 - q) = -2az + \ln(v_0{}^2 - q)$ или $\ln\dfrac{v^2 - q}{v_0^2 - q} = -2az$. Отсюда получаем

$$v^2 = q + (v_0^2 - q)e^{-2az}.$$

При перемещении груза в точку В $z = \ell$=1,5 м, $v = v_B$. Тогда

$$v_B^2 = 8{,}75 + \frac{144 - 8{,}75}{e} = 58{,}51 \quad \text{и} \quad v_B = 7{,}65 \text{ м/с}.$$

2). При рассмотрении движения груза на участке ВС найденная скорость будет для движения на этом участке начальной скоростью. Составим дифференциальные уравнения движения груза в проекции на оси Ox и Oy.

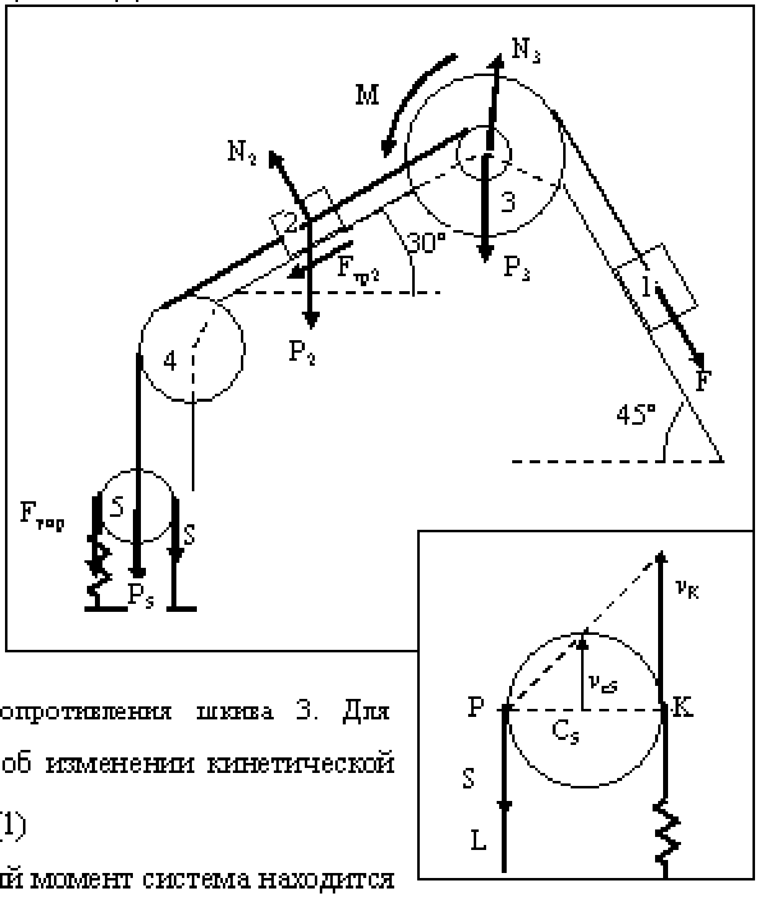
$m\dfrac{dv_x}{dt} = F_x$. $\dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{4}{m}\sin 4t$. Разделяя переменные и интегрируя получим $v_x = -\dfrac{1}{m}\cos 4t + C_2$; при начальных условиях при $t = 0$ $v_0 = v_B$ и $C_2 = v_B + \dfrac{1}{m} = 7{,}65 + \dfrac{1}{2{,}4} = 8{,}07$. То есть

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 8{,}07 - 0.417\cos 4t.$$

После интегрирования: $x = 8{,}07t - \dfrac{0{,}417}{4}\sin 4t + C_3$. Т.к. при $t = 0$ $x = 0$ то $C_3 = 0$ и окончательно искомый закон движения груза на участке ВС будет

$$\boxed{x = 8{,}07t - 0{,}104\,\sin 4t}$$

ЗАДАНИЕ Д6-00



Дано: m_1=0 кг, m_2=6 кг, m_3=4 кг, m_4=0 кг (равномерно распределена по ободу), m_5=5 кг (сплошной однородный шкив), c=200 Н/м, M=1,2 Нм, $F = f(x) = 80(4+5s)$ Н, f =0,1, R_3=0,3 м, r_3=0,1 м, ρ_3=0,2 м, R_4=0,2 м, s_1=0,2 м.

Найти: ω_3 в тот момент времени, когда $s = s_1$

РЕШЕНИЕ:

1.Рассмотрим движение неизменяемой механичесой системы, состоящей из весомых тел 2,3,5 и невесомых тел 1,4, соединенных нитями. На систему действуют внешние силы: активные $\vec{F}$, $\vec{F}_{упр}$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, $\vec{P}_5$, реакции $\vec{N}_2$, $\vec{N}_3$, натяжение нити S, сила трения $F_{тр2}$ и момент M сил сопротивления шкива 3. Для определения ω_3 воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии:

$$T - T_0 = \sum A_k^e. \qquad (1)$$

2.Определяем T_0 и T. Так как в начальный момент система находится в покое, то $T_0 = 0$. Величина T равна сумме кинетических энергий всех тел системы: $T = T_2 + T_3 + T_5$.

Учитываем: 1) тело 2 движется поступательно $T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2$;

2) тело 3 вращается вокруг неподвижной оси $T_3 = \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2$; момент инерции тела: $I_3 = m_3 \rho_3^2$, т.е. $T_3 = \frac{1}{2} m_3 \rho_3^2 \omega_3^2$;

3) тело 5, радиус которого обозначим r_5, движется плоскопараллельно: $T_5 = \frac{1}{2} m_5 v_{c5}^2 + \frac{1}{2} I_{c5} \omega_5^2$, момент инерции $I_{c5} = \frac{1}{2} m_5 r_5^2$, а $\omega_5 = \frac{v_{c5}}{r_5}$ и $T_5 = \frac{1}{2} m_5 v_{c5}^2 + \frac{1}{4} m_5 v_{c5}^2 = \frac{3}{4} m_5 v_{c5}^2$

Выразим все скорости через ω_3. Заметим, что $v_2 = v_{c5} = \omega_3 r_3$.

Следовательно $T = \frac{r_3^2}{2}\left(m_2 + m_3 \frac{\rho_3^2}{r_3^2} + \frac{3}{2} m_5\right)\omega_3^2 = \frac{0{,}01}{2}\left(6 + 4 \cdot \frac{0{,}04}{0{,}01} + 1{,}5 \cdot 5\right)\omega_3^2 = 0{,}148\, \omega_3^2$ (Дж). (2)

3.Найдем сумму работ всех действующих внешних сил при перемещении, которое будет иметь система, когда груз 1 пройдет путь $s = s_1$. Обозначим: λ_0 и λ_1 - начальное и конечное удлинения пружины, φ_3 - угол поворота шкива 3, s_2 и s_5 - перемещение груза 2 и центра блока 5.

$$A(\vec{F}) = \int_0^{s_1} 80(4+5s)ds = 80\left(4s_1 + \frac{5}{2}s_1^2\right) = 80\left(4 \cdot 0{,}2 + \frac{5 \cdot 0{,}04}{2}\right) = 72 \text{ (Дж)},$$

$$A(\vec{P}_5) = -m_5 g s_5, \qquad A(\vec{P}_2) = -m_2 g s_2 \sin 30, \qquad A(\vec{F}_{тр2}) = -f m_2 g s_2 \cos 30,$$

$$A(M) = -M\varphi_3, \qquad A(\vec{F}_{упр}) = \frac{c}{2}(\lambda_0^2 - \lambda_1^2)$$

Работы остальных сил равны нулю, так как точка P, где приложена сила S – мгновенный центр скоростей; точка приложения P_3 и N_3 неподвижна, а N_2 перпендикулярна перемещению груза.

Как видно из рисунка $s_1 = \varphi_3 R_3$ ($\varphi_3 = \frac{s_1}{R_3}$) и $s_5 = s_2 = \varphi_3 r_3 = s_1\frac{r_3}{R_3}$. По условию задачи $\lambda_0 = 0$, а конечное удлинение пружины равно удвоенному перемещению центра блока 5 (т.Р – мгновенный центр скоростей, зависимость между перемещениями такая же как и между скоростями), т.е. $\lambda_1 = 2s_5 = 2s_1\frac{r_3}{R_3}$. Следовательно работы внешних сил равны:

$A(P_2) = -m_2 g s_1 \frac{r_3}{R_3}\sin 30 = -6\cdot 10\cdot 0{,}2\frac{0{,}1}{0{,}3}0{,}5 = -2$(Дж),

$A(P_5) = -m_5 g s_1 \frac{r_3}{R_3} = -5\cdot 10\cdot 0{,}2\frac{0{,}1}{0{,}3} = -3{,}33$ (Дж),

$A(F_{тр\,2}) = -f m_2 g s_1 \frac{r_3}{R_3}\cos 30 = -0{,}1\cdot 6\cdot 10\cdot 0{,}2\frac{0{,}1}{0{,}3}0{,}866 = -0{,}35$ (Дж),

$A(M) = -M\frac{s_1}{R_3} = 1{,}2\frac{0{,}2}{0{,}3} = -0{,}8$ (Дж),

$A(F_{упр}) = -2cs_1^2\frac{r_3^2}{R_3^2} = -2\cdot 200\cdot 0{,}04\frac{0{,}01}{0{,}09} = -1{,}78$ (Дж).

Сумма вычисленных работ равна $\sum A_k^e = 72-2-3{,}33-0{,}35-0{,}8-1{,}78 = 63{,}74$ (Дж). (3)

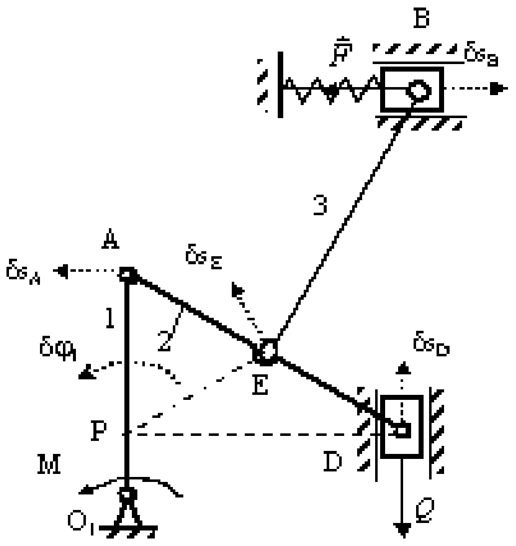
Подставляя выражения (2) и (3) в (1) при $T_0 = 0$ получаем уравнение для искомой величины ω_3:

$$0{,}148\,\omega_3^2 = 63{,}74 \qquad \text{и} \qquad \omega_3 = \sqrt{\frac{63{,}74}{0{,}148}} = 20{,}8 \text{ (1/c)}.$$

ЗАДАНИЕ Д9-00

Дано: $\alpha = 90°$, $\beta = 120°$, $\gamma = 90°$, $\varphi = 90°$, $\theta = 60°$, c=180 Н/см, Q=400 Нм, M=100 Нм, АЕ=ЕД, $\ell_1 = 0{,}4$ м.

Найти: чему равна при равновесии деформация пружины λ.



РЕШЕНИЕ:

1.Строим положение механизма в соответствии с заданными углами. Для решения воспользуемся принципом возможных перемещений, согласно которому

$$\sum \delta A_k = 0 . \qquad (1)$$

Предполагаем, что пружина растянута. Неизвестную силу упругости пружины $F = c\lambda$ найдем с помощью уравнения (1) а затем определим λ.

2.Для составления уравнения (1) сообщим механизму возможное перемещение и введем обозначения для перемещений звеньев к которым приложены активные силы: $\delta\varphi_1$ - поворот стержня вокруг оси O_1 (момент М), δs_B, δs_D - перемещение ползунов B и D, δs_A, δs_E - перемещения узловых точек.

Учитываем, что зависимости между возможными перемещениями такие же как между соответствующими скоростями звеньев.

3.Выразим все перемещения через $\delta\varphi_1$.

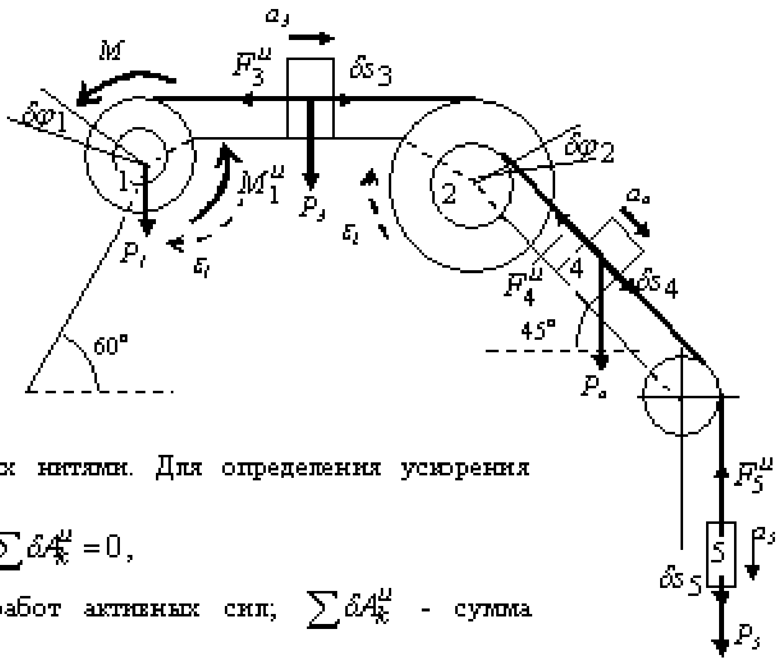
$\delta s_A = \ell_1 \delta\varphi_1$; т.Р – мгновенный центр скоростей, ΔРАЕ – равносторонний (угол АДР=30° и АР=0,5РД=АЕ, РАЕ=60°), т.е. $\delta s_E = \delta s_A = \ell_1 \delta\varphi_1$; $\delta s_E \cos 30 = \delta s_D \cos 60$ (равенство проекций скоростей и перемещений на звено АД) $\delta s_D = \ell_1 \dfrac{\cos 30}{\cos 60}\delta\varphi_1$; также $\delta s_B \cos 60 = \delta s_E \cos 60$ т.е. $\delta s_B = \delta s_E = \ell_1 \delta\varphi_1$.

4.Составим для механизма уравнение (1): $M\delta\varphi_1 - Q\delta s_D - F\delta s_B = 0$. Произведя замену всех перемещений через $\delta\varphi_1$ $\left(M - Q\ell_1 \dfrac{\cos 30}{\cos 60} - F\ell_1\right)\delta\varphi_1 = 0$ и, учитывая, что $\delta\varphi_1 \neq 0$, получаем

$$F = \frac{M}{\ell_1} - Q\frac{\cos 30}{\cos 60} = \frac{100}{0{,}4} - 400 \cdot \frac{0{,}866}{0{,}5} = -442{,}8 \text{ (Н)},$$

$$\lambda = \frac{F}{c} = -\frac{442{,}8}{180} = -2{,}46 \text{ (см)} - \text{пружина сжата.}$$

ЗАДАНИЕ Д10-00



Дано: P_1=10 Н, P_2=0 Н, P_3=20 Н, P_4=30 Н, P_5=40 Н, P_6=0 Н М=10 Нм, R_1=0,2 м, r_1=0,1 м, ρ_1=0,1 м, R_2=0,3 м, r_2=0,15 м, ρ_2=0,2 м.

Найти: a_5

РЕШЕНИЕ:

1.Рассмотрим движение механичесой системы, состоящей из тел 1,2,...,6, соединенных нитями. Для определения ускорения применим общее уравнение динамики:

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0,$$

где $\sum \delta A_k^a$ - сумма элементарных работ активных сил; $\sum \delta A_k^u$ - сумма элементарных работ сил инерции.

2.Зададимся направлением ускорения . Изобразим силы инерции и моменты инерции, величины которых равны:

$$M_1^u = \frac{P_1}{g}\rho_1^2\varepsilon_1,\ F_3^u = \frac{P_3}{g}a_3,\ F_4^u = \frac{P_4}{g}a_4,\ F_5^u = \frac{P_5}{g}a_5.$$

3.Сообщая системе возможное перемещение получим

$$(P_5 - F_5^u)\delta s_5 + (P_4\sin 45 - F_4^u)\delta s_4 - F_3^u\delta s_3 - M\delta\varphi_1 - M_1^u\delta\varphi_1 = 0$$

Выразим все перемещения через $\delta\varphi_2$:

$$\delta s_5 = \delta s_4 = r_2\delta\varphi_2; \qquad \delta s_3 = R_2\delta\varphi_2 = R_1\delta\varphi_1, \text{ т.е. } \delta\varphi_1 = \frac{R_2}{R_1}\delta\varphi_2.$$

После подстановки в уравнение имеем

$$\left[\left(P_5r_2 + P_4\sin45\cdot r_2 - M\frac{R_2}{R_1}\right) - \frac{1}{g}\left(P_5r_2a_5 + P_4r_2a_4 + P_3R_2a_3 + P_1\rho_1^2\frac{R_2}{R_1}\varepsilon_1\right)\right]\delta\varphi_2 = 0$$

входящие сюда ускорения выразим через искомую величину (через a_5):

$$a_5 = a_4 = r_2\varepsilon_2;\ \varepsilon_2 = \frac{a_5}{r_2};\ a_3 = R_2\varepsilon_2 = a_5\frac{R_2}{r_2} = R_1\varepsilon_1;\ \varepsilon_1 = \frac{R_2}{r_2R_1}a_5.$$

Затем, учтя, что $\delta\varphi_2 \neq 0$, приравняем нулю выражение в квадратных скобках. Из полученного уравнения найдем

$$a_5 = \frac{(P_5 + P_4\sin45)r_2 - MR_2/R_1}{(P_5 + P_4)r_2 + P_3R_2^2/r_2 + P_1\rho_1^2R_2^2/r_2/R_1^2}g =$$

$$= \frac{(40+30\cdot0{,}707)0{,}15 - 10\cdot0{,}3/0{,}2}{(40+30)0{,}15 + 20\cdot0{,}09/0{,}15 + 10\cdot0{,}01\cdot0{,}09/0{,}15/0{,}04}10 = -2{,}42\ (\text{м/с}^2).$$

– действительное направление ускорения тела 5 и всех других тел системы противоположно.