

(21) Вычислите $\int_L \sqrt{1 + \cos^4 x} dL$, где (1)
 L - дуга $y = \tan x$, $0 \leq x \leq \pi/4$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int_L \sqrt{1 + \cos^4 x} dL &= \int \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad \left\{ \begin{array}{l} y' = \frac{1}{\cos^2 x} \end{array} \right. \\ &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \cos^4 x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{\cos^4 x}} dx = \\ &= \int_0^{\pi/4} \frac{1 + \cos^4 x}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \cos^2 x \right) dx = \\ &= \tan x \Big|_0^{\pi/4} + \int_0^{\pi/4} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \tan \frac{\pi}{4} - \tan 0 + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} (1 + \cos 2x) dx = \tan \frac{\pi}{4} - \tan 0 + \\ &+ \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\pi/4} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} - 0 \right) = 1 + \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} + \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

(12) Вычислите $\int_L (x+y)dx + (x-y)dy$

(2)

$L: x = a \cos t, y = b \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$

Решение.

$$\int_L (x+y)dx + (x-y)dy = \int_{t=0}^{2\pi} \left. \begin{array}{l} x = a \cos t, y = b \sin t \\ dx = -a \sin t dt \\ dy = b \cos t dt \\ t = 0 \rightarrow t = 2\pi \end{array} \right\} =$$

$$= \int_0^{2\pi} (a \cos t + b \sin t) \cdot (-a \sin t dt) + (a \cos t - b \sin t) b \cos t dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (-a^2 \cos t \sin t - ab \sin^2 t + ab \cos^2 t - b^2 \sin t \cos t) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos t \sin t (-a^2 - b^2) + ab (\cos^2 t - \sin^2 t)) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2}(a^2 + b^2) \sin 2t + ab \cos 2t \right) dt =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}(a^2 + b^2) \cdot \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{ab}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{4}(a^2 + b^2) (\cos 4\pi - \cos 0) + \frac{ab}{2} (\sin 4\pi - \sin 0) =$$

$$= \frac{1}{4}(a^2 + b^2) (1 - 1) + \frac{ab}{2} (0 - 0) = 0.$$

15)

Вычислить поток векторного поля $F = \{x^2, y^2, z^2\}$ через внешнюю сторону замкнутой поверхности $S: x=0, x=a, y=0, y=a, z=0, z=a$.
Решение.

$$\Pi_{zn} = \iint_S \operatorname{div} \vec{a} \, dS$$

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2x + 2y + 2z = 2(x+y+z).$$

$$\Pi = \iiint_V (x+y+z) \, dx \, dy \, dz = \int_0^a \int_0^a \int_0^a (x+y+z) \, dx \, dy \, dz =$$

$$= 2 \int_0^a dz \int_0^a dy \int_0^a (x+y+z) \, dx =$$

$$= 2 \int_0^a dz \int_0^a dy \left(\frac{x^2}{2} + yx + zx \right) \Big|_0^a =$$

$$= 2 \int_0^a dz \int_0^a \left(\frac{a^2}{2} + ay + az \right) dy = 2 \int_0^a dz \left(\frac{a^2}{2} y + a \frac{y^2}{2} + azy \right) \Big|_0^a =$$

$$= 2 \int_0^a \left(\frac{a^3}{2} + \frac{a^3}{2} + a^2 z \right) dz =$$

$$= 2 \left(\frac{a^3}{2} z + \frac{a^3}{2} z + a^2 \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^a =$$

(3)

$$= 2 \left(\frac{a^4}{2} + \frac{a^4}{2} + \frac{a^4}{2} \right) = 3a^4.$$

(N3) Вычислить интеграл поверхности Грота.

$$\iint_S z \, dS, \quad S: x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad z \geq 0$$

+ Решение.

S - сфера, расположенная выше плоскости xy , т.е. полусфера.

$$\iint_S z \, dS = \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \, dx \, dy,$$

где D - круг $x^2 + y^2 \leq R^2, z=0$. Так как на полусфере $x \, dx + y \, dy + z \, dz = 0$,

$$\text{то } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$$

откуда

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

$$\text{Поэтому } \iint_S z \, dS = \iint_D R \, dx \, dy = R \iint_D dx \, dy = R \cdot \pi R^2 = \pi R^3.$$

14.

Вычислить поверхностный интеграл II рода

$\iint_S (y^2 + z^2) dxdy$, S - верхняя сторона части поверхности $z = \sqrt{9 - x^2}$ отсеченная плоскостями $y = 0$, $y = 2$

Решение.

z
= 21
= 447

$$\iint_S (y^2 + z^2) dxdy = \iint_S (y^2 + 9 - x^2) dxdy =$$

$$\int_{-3}^3 dx \int_0^2 (y^2 + 9 - x^2) dy =$$

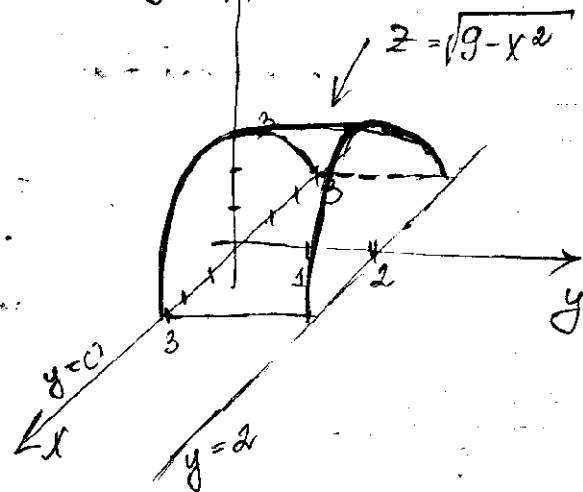
$$= \int_{-3}^3 dx \left(\frac{y^3}{3} + 9y - x^2 y \right) \Big|_0^2 =$$

$$= \int_{-3}^3 \left(\frac{8}{3} + 18 - 2x^2 \right) dx =$$

$$= \int_{-3}^3 \left(\frac{62}{3} - 2x^2 \right) dx =$$

$$= \left(\frac{62}{3} x - \frac{2x^3}{3} \right) \Big|_{-3}^3 =$$

$$= \frac{2}{3} (31x - x^3) \Big|_{-3}^3 =$$



$y = 0$ - плоскость XOZ

$y = 2$ - плоскость $YXOZ$

$z = \sqrt{9 - x^2}$ - полуцилиндр, для которого $z \geq 0$.

4

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{3} (31 \cdot 3 - 3^3) - \frac{2}{3} (-31 \cdot 3 + 3^3) = \\
 &= 2 (31 - 9) - 2 (-31 + 9) = 2 \cdot 22 + 2 \cdot 22 = \\
 &= 44 + 44 = 88.
 \end{aligned}$$

$7-x^2$

$\rightarrow$
y

xy

xy

или нр,
но $x \geq 0$.