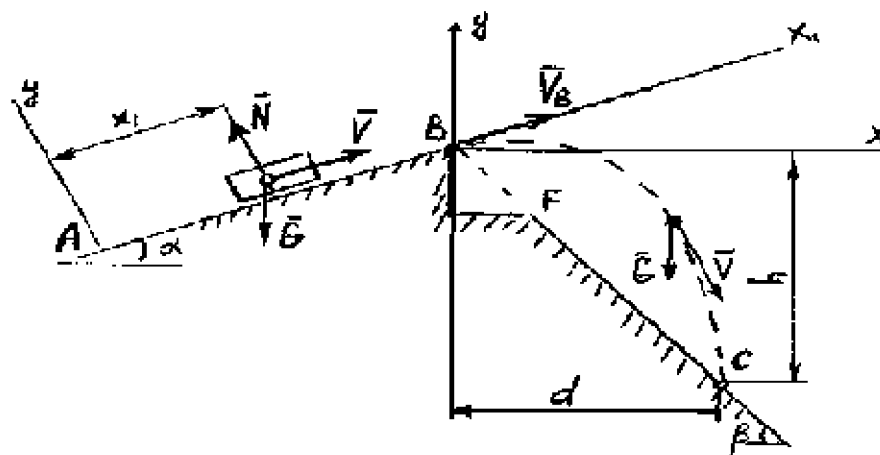




$$\begin{aligned} \alpha &= 15^\circ & f &= 0 \\ V_A &= 12 \text{ м/с} & d &= 50 \text{ м} \\ \beta &= 60^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= ? \\ y &= f(x) = ? \end{aligned}$$

Розв'язання.

Розглянемо рух тіла на ділянці АВ. До тіла, що являє собою невілічну матеріальну точку, прикладена одна активна сила - його вага $\vec{G}$. Застосувавши аксіому про звільнення від зв'язей, уявно відкинемо нахилenu покрівлю, замінивши її дію на тіло силою, що дорівнює реакції зв'язі. Ця сила має дві складові: нормальну складову $\vec{N}$, що направлена перпендикулярно до нахиленої площини, і силу тертя $\vec{F}_{\text{тр}}$, яка спрямована за дотичною до траєкторії у бік, протилежний руху тіла.

Запишемо основне рівняння динаміки матеріальної точки:

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}. \quad (1)$$

Спрямуємо вісь Ax_1 вздовж нахиленої площини покрівлі АВ вниз. Початок відліку осі Ax_1 виберемо у початковому положенні тіла. Початкова швидкість $\vec{V}_A$ спрямована вздовж осі Ax_1 вниз (рис. 1.1).

Проектуючи (1) на вісь Ax_1 , отримаємо диференціальне рівняння руху матеріальної точки:

$$m\ddot{x}_1 = \sum X_{1i} = -G \cdot \sin \alpha$$

$$m\ddot{x}_1 = -mg \cdot \sin \alpha$$

$$\ddot{x}_1 = -g \cdot \sin \alpha = -B$$

де $B = 9,8 \cdot \sin 15^\circ = 2,536 \text{ м/с}^2$

Проінтегрувавши отримане рівняння отримаємо

$$\dot{x}_1 = -Bt + C_1$$

$$x_1 = -B \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2$$

Для визначення невідомих сталих інтегрування C_1 та C_2 складемо початкові умови:

$$\text{При } t=0: \begin{aligned} x_{10} &= 0 \\ \dot{x}_{10} &= V_A \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} C_2 &= 0 \\ C_1 &= V_A \end{aligned}$$

Підставляючи значення C_1 та C_2 отримаємо рівняння руху точки на ділянці АВ:

$$x_1 = -B \frac{t^2}{2} + V_A t$$

В момент, коли точка залишає ділянку АВ, маємо

$$\begin{aligned} \underline{t = \tau}: \quad \begin{aligned} x_1 &= l \\ \dot{x}_1 &= V_B \end{aligned} \quad \begin{cases} l = -B \frac{\tau^2}{2} + V_A \tau \\ V_B = -B \tau + V_A \end{cases} \end{aligned}$$

Розглянемо рух тіла на ділянці BC. Зобразимо матеріальну точку, на яку діє лише сила ваги $\vec{G}$, на траєкторії в довільний момент часу.

Запишемо основне рівняння динаміки матеріальної точки на ділянці BC:

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{G}. \quad (1.16)$$

Початок координат виберемо у точці B і спрямуємо координатні осі Bx і By як показано на рис.

Диференціальні рівняння руху цієї точки мають вигляд:

$$m\ddot{x} = \sum X_i = 0 \\ \ddot{x} = 0$$

$$m\ddot{y} = \sum Y_i = -G \quad G = mg \\ \ddot{y} = -g$$

Інтегруючи отримані рівняння отримаємо

$$\dot{x} = C_1 \\ x = C_1 t + C_2 \\ \dot{y} = -gt + C_3 \\ y = -\frac{g}{2}t^2 + C_3 t + C_4$$

Для визначення невідомих сталих інтегрування C_1, C_2, C_3, C_4 складемо початкові умови руху матеріальної точки з початкового положення B. Матеріальна точка починає рух з точки B зі швидкістю $\vec{V}_B$, що складає кут α з горизонтальною віссю, тоді початкові умови матимуть вигляд

$$\text{при } \underline{t=0} : x = x_H = 0; \quad y = y_H = 0;$$

$$x_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = V_B \cdot \cos \alpha$$

$$y_0 = 0, \quad \dot{y}_0 = V_B \cdot \sin \alpha$$

$$\text{звідкіля} \quad C_2 = 0, \quad C_1 = V_B \cdot \cos \alpha \\ C_4 = 0, \quad C_3 = V_B \cdot \sin \alpha$$

Підставляючи отримані значення сталих інтегрування в рівняння отримаємо закон руху матеріальної точки на ділянці BC:

$$\begin{cases} x = V_B \cos \alpha \cdot t \\ y = V_B \sin \alpha \cdot t - g \frac{t^2}{2} \end{cases}$$

Коли матеріальна точка досягає точки C, маємо

$$\underline{t=T}: \quad x=d \quad h=d \cdot \operatorname{tg} \beta: \quad \begin{cases} d = V_B \cdot \cos \alpha \cdot T \\ d \cdot \operatorname{tg} \beta = V_B \cdot \sin \alpha \cdot T - g \frac{T^2}{2} \end{cases}$$

виключаємо з рівнянь час t

$$t = \frac{x}{V_B \cos \alpha} \quad y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x^2}{2 V_B^2 \cos^2 \alpha}$$

$$- d \cdot \operatorname{tg} \beta = d \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{g d^2}{2 V_B^2 \cos^2 \alpha}$$

$$\text{тоді} \quad V_B = \sqrt{\frac{g d}{2 \cos^2 \alpha (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)}} = \sqrt{\frac{9.8 \cdot 50}{2 \cdot \cos^2 15^\circ (\operatorname{tg} 15^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ)}} = 11.46 \text{ м/с}$$

остаточно отримаємо шукане рівняння

$$y = x \cdot \operatorname{tg} 15^\circ - 9.8 \cdot \frac{x^2}{2 \cdot 11.46^2 \cdot \cos^2 15^\circ} = 0.268x - 0.04x^2$$

$$\text{або} \quad \underline{y = 0.268x - 0.04x^2} \quad \text{тоді} \quad \underline{t = \frac{V_A - V_B}{g} = \frac{12 - 11.46}{9.81} = 0.21 \text{ с}}$$