Методичні вказівки до виконання розрахунково-графічних робіт з теоретичної механіки розділ «Динаміка» для студентів всіх спеціальностей з кредитно-модульною системою організації навчального процесу денної та заочної форми навчання / Укл. Рассказов О.О., Рожок Л.С., Кикоть С.В., Глушенко Ю.А.,Хорошев К.Г.– К.: НТУ, 2007.– 44 с.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Бондаренко А.А., Дубінін О.О., Переяславцев О.М.* Динаміка.– К.: Знання.– 2004.– 590 с. (Теоретична механіка: Підручник: У 2 ч.– Ч.2).

2. *Бутенин Н.В., Лунц Я.Л. Меркин Д.Р.* Динамика.– М.: Наука.– 1970.– 543 с. (Курс теоретической механики: В 2 т. Т.2).

3. *Добронравов В.В., Никитин Н.Н., Дворников А.Л* Курс теоретической механики.– М.: Высшая школа.– 1974.–612 с

4. *Теоретична механіка. Динаміка*: Навч. посібник / В.Я. Савенко, С.М. Гавриленко, Л.А. Даниленко, Ю.В. Парахнюк; За загальною ред. В.Я. Савенко.– К.: ІЗМН.– 1996.– 312 с.

5. *Яблонский А.А. Никифорова В.М.* Курс теоретической механики. Ч.2.– М.: Высшая школа.- 1977.– 368 с.

6. *Яблонский А.А., и др.* Сборник задач для курсовых работ по теоретической механики.– М.: Высшая школа.– 1978.– 389 с.

7. *Рассказов О.О., Гавриленко С.М., Даниленко Л.А.* Методичні вказівки до курсових робіт з теоретичної механіки розділ «Динаміка» для студентів всіх спеціальностей денної форми навчання / К.: НТУ, 2001.- 54 с.

Мета запропонованих методичних вказівок – надати допомогу студентам всіх спеціальностей з кредитно-модульною системою організації навчального процесу денної та заочної форми навчання у виконанні передбачених програмою розрахунково-графічних робіт з теоретичної механіки (розділи «Динаміка» та «Аналітична механіка»).

В даній роботі наведено умови і рисунки задач (30 варіантів) для виконання чотирьох контрольних розрахунково-графічних робіт **Д-1, Д-2, Д-3, Д-4** з теоретичної механіки, а також відповідні методичні вказівки до виконання цих робіт та приклади виконання кожного завдання з докладними поясненнями їх виконання.

З кожної задачі студент обирає номер варіанту, що відповідає його порядковому номеру у списку журналу групи.

<u>На обкладинці потрібно записати:</u>

Міністерство освіти і науки України
Національний транспортний університет
Кафедра теоретичної та прикладної механіки
Дисципліна – теоретична механіка

Контрольна розрахунково-графічна робота з динаміки
(назва роботи)
Варіант №___

Також необхідно вказати шифр академгрупи, прізвище та ініціали студента, посаду викладача кафедри, що приймає роботу, його прізвище та ініціали.

На першій сторінці записують умову задачі, виконують рисунок креслення завдання і виписують з таблиці усі необхідні дані для обраного варіанту.

Розв'язування завдання треба розпочинати з нової сторінки. На рисунку та в розрахунковій схемі вказують усі необхідні розміри, величини кутів та ін., а на розрахунковій схемі зображують вектори заданих сил, реакцій в'язей і, при необхідності, вектори сил інерції, а також осі обраної системи координат. Усі креслення слід виконувати якісно, охайно, у масштабі, який дозволить чітко зобразити на них вектори сил, швидкостей, прискорень та ін.

Виконання контрольної розрахунково-графічної роботи необхідно супроводжувати короткими поясненнями (які формули або теореми використовуються, звідки і чому отримані ті чи інші результати тощо), а також треба детально навести хід розрахунків.

Захист контрольної розрахунково-графічної роботи супроводжується звітом з теоретичного матеріалу у письмовій або усній формі.

<u>*Роботи, що не відповідають перерахованим вимогам, зараховуватись не будуть.*</u>

<u>Завдання Д–1.</u> ІНТЕГРУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

Тіло починає рухатись з точки A з початковою швидкістю $\bar{V}_A$ вздовж прямолінійної ділянки шляху AB довжиною l нахиленої площини (для схеми 6 горизонтальної площини), що складає кут α з горизонтом. Коефіцієнт тертя ковзання тіла по площині дорівнює f. Для схеми 3 до тіла на ділянці AB прикладена стала за модулем та напрямом сила $\bar{P}$. Через τ секунд тіло у точці B зі швидкістю $\bar{V}_B$ залишає нахилену площину і падає у точку C зі швидкістю $\bar{V}_C$. При цьому тіло перебуває у повітрі T секунд.

При розв'язуванні задачі тіло слід прийняти за матеріальну точку і не враховувати опір повітря.

Варіанти схем зображені на рис. 1.2, а необхідні для розв'язування задачі величини і ті, що треба визначити, наведені в таблиці 1.

Розв'язок задачі складається з двох етапів:

– досліджується прямолінійний рух точки (ділянка AB);

– досліджується криволінійний рух точки у вертикальній площині (вільне падіння без урахування опору повітря - ділянка BC).

<u>Послідовність виконання роботи</u>

1. Зобразити на траєкторії тіло, що розглядається як матеріальна точка, в довільний момент часу (але не в початковий і не в кінцевий момент часу)

2. Зобразити на схемі вектори активних сил, що діють на задану точку.

3. Застосувати аксіому про звільнення від в'язей і показати на схемі реакції відкинутих в'язей.

4. Вибрати для кожної ділянки систему відліку, помістивши початок відліку у початкові положення матеріальної точки (осі координат показані на схемах).

5. Скласти диференціальні рівняння руху точки у вибраній системі відліку.

6. Зінтегрувати двічі кожне з диференціальних рівнянь.

7. Скласти початкові умови руху (початкові координати точки і проекції її початкової швидкості на кожну координатну вісь) за умовами задачі.

8. За початковими умовами визначити сталі інтегрування.

9. Підставити значення сталих інтегрування в результати інтегрування і визначити шукані величини за умовами задачі.

<u>Приклад виконання завдання.</u>

Тіло, маючи початкову швидкість $\bar{V}_A$, рухається скатом покрівлі AB, що складає кут α з горизонтом і має довжину l. Коефіцієнт тертя ковзання дорівнює f. Через τ секунд тіло в точці B зі швидкістю $\bar{V}_B$ залишає покрівлю

і перебуваючи T секунд у повітрі, дістає точки C зі швидкістю $\bar{V}_C$ (рис. 1.1).

Задані величини: $V_A = 0,5\,м/с$, $\alpha = 45^\circ$, $l = 10\,м$, $\tau = 2\,с$, $d = 8\,м$.

Визначити коефіцієнт тертя ковзання f, висоту h і швидкість V_C тіла в точці C.

<u>Розв'язання.</u>

Розглянемо рух тіла на ділянці AB. До тіла, що являє собою невільну матеріальну точку, прикладена одна активна сила - його вага $\bar{G}$. Застосувавши аксіому про звільнення від в'язей, уявно відкинемо нахилену покрівлю, замінивши її дію на тіло силою, що дорівнює реакції в'язі. Ця сила має дві складові: нормальну складову $\bar{N}$, що направлена перпендикулярно до нахиленої площини, і силу тертя $\bar{F}_{тр}$, яка спрямована за дотичною до траєкторії у бік, протилежний руху тіла.

Запишемо основне рівняння динаміки матеріальної точки:

$$m\bar{a} = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i = \bar{G} + \bar{N} + \bar{F}_{тр}. \tag{1.1}$$

Спрямуємо вісь Ax_1 вздовж нахиленої площини покрівлі AB вниз. Початок відліку осі Ax_1 виберемо у початковому положенні тіла. Початкова швидкість $\bar{V}_A$ спрямована вздовж осі Ax_1 вниз (рис. 1.1).

Проектуючи (1.1) на вісь Ax_1, отримаємо диференціальне рівняння руху матеріальної точки :

$$m\ddot{x}_1 = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = G\sin\alpha - F_{тр}, \tag{1.2}$$

або

$$\frac{G}{g}\ddot{x}_1 = G\sin\alpha - F_{тр}. \tag{1.3}$$

Але $F_{тр} = fN = fG\cos\alpha$, тоді після скорочення на G дістанемо:

$$\ddot{x}_1 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha). \tag{1.4}$$

Для інтегрування диференціального рівняння руху замінимо $\ddot{x}_1$ на $\frac{d\dot{x}_1}{dt}$, тоді (1.4) набуває вигляду

$$\frac{d\dot{x}_1}{dt} = g(\sin\alpha - f\cos\alpha). \tag{1.5}$$

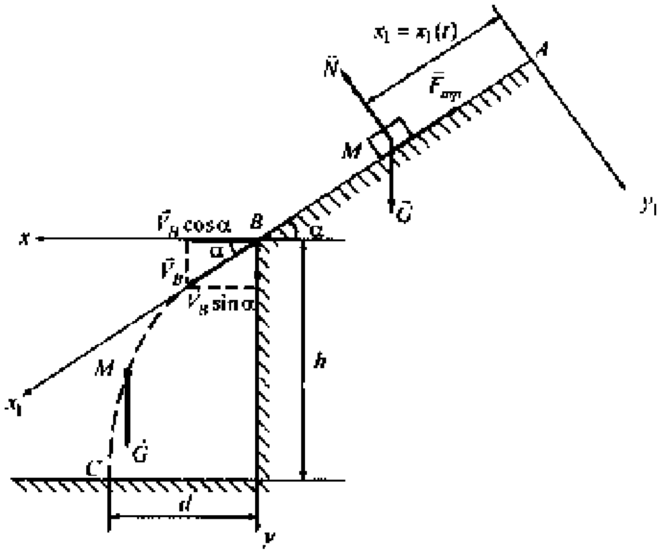

Рис. 1.1. Схема руху матеріальної точки

Відокремлюючи змінні в (1.5), отримаємо

$$d\dot{x}_1 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)dt. \qquad (1.6)$$

Інтегруючи (1.6), знаходимо

$$\dot{x}_1 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t + c_1. \qquad (1.7)$$

Замінюючи тут $\dot{x}_1$ на $\frac{dx_1}{dt}$ і відокремлюючи змінні, дістанемо

$$dx_1 = \left[g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t + c_1\right]dt. \qquad (1.8)$$

Інтегруючи (1.8), маємо

$$x_1 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2. \qquad (1.9)$$

Для визначення невідомих сталих інтегрування c_1 та c_2 складемо початкові умови:

$$\text{при} \quad t = t_0 = 0, \quad (x_1)_0 = 0, \quad (\dot{x}_1)_0 = V_A.$$

Підставляючи початкові умови в (1.7) та (1.9), отримаємо:

$$(\dot{x}_1)_0 = c_1, \quad (x_1)_0 = 0,$$

тоді знайдемо значення шуканих сталих інтегрування:

$$c_1 = V_A, \quad c_2 = 0. \qquad (1.10)$$

Підставляючи значення c_1 та c_2 в рівняння (1.9), отримаємо рівняння руху точки на ділянці AB:

$$x_1 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\frac{t^2}{2} + V_A t. \qquad (1.11)$$

Швидкість точки на цій ділянці в довільний момент часу:

$$\dot{x}_1 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t + V_A. \qquad (1.12)$$

В момент, коли точка залишає ділянку AB, маємо

$$t = \tau, \quad x_1 = l, \quad \dot{x}_1 = V_B. \qquad (1.13)$$

Для визначення коефіцієнта тертя f, запишемо рівняння (1.11) з урахуванням умов (1.13). Тоді

$$l = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\frac{\tau^2}{2} + V_A\tau. \qquad (1.14)$$

Розв'язуючи рівняння (1.14) відносно f і підставляючи числові дані, отримаємо:

$$f = 0,35.$$

Скориставшись умовами (1.13) і рівнянням (1.12), визначаємо швидкість тіла, з якою воно покидає ділянку AB:

$$V_B = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\tau + V_A. \qquad (1.15)$$

Після підстановки числових значень маємо:

$$V_B = 9,48\ м/с.$$

Розглянемо рух тіла на ділянці ВС. Зобразимо матеріальну точку, на яку діє лише сила ваги $\bar{G}$, на траєкторії в довільний момент часу.

Запишемо основне рівняння динаміки матеріальної точки на ділянці BC:

$$m\bar{a} = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i = \bar{G}. \tag{1.16}$$

Початок координат виберемо у точці B і спрямуємо координатні осі Bx і By як показано на рис. 1.1.

Диференціальні рівняння руху цієї точки мають вигляд:

$$m\ddot{x} = 0; \quad m\ddot{y} = G,$$

або

$$\ddot{x} = 0; \quad \ddot{y} = g. \tag{1.17}$$

Для інтегрування диференціальних рівнянь подамо

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}, \text{ а } \ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt}.$$

Тоді

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = 0; \quad \frac{d\dot{y}}{dt} = g. \tag{1.18}$$

Відокремлюючи змінні в (1.18), маємо

$$d\dot{x} = 0; \quad d\dot{y} = g\,dt. \tag{1.19}$$

Інтегруючи (1.19), отримаємо

$$\dot{x} = c_3; \quad \dot{y} = gt + c_4. \tag{1.20}$$

Замінюючи $\dot{x}$ на $\frac{dx}{dt}$ і $\dot{y}$ на $\frac{dy}{dt}$ в рівняннях (1.20), дістанемо

$$\frac{dx}{dt} = c_3; \quad \frac{dy}{dt} = gt + c_4. \tag{1.21}$$

Відокремлюючи змінні в диференціальних рівняннях (1.21) та інтегруючи їх, дістанемо

$$x = c_3 t + c_5;$$

$$y = \frac{1}{2}gt^2 + c_4 t + c_6. \tag{1.22}$$

Для визначення невідомих сталих інтегрування c_3, c_4, c_5, c_6 складемо початкові умови руху матеріальної точки з початкового положення B. Матеріальна точка починає рух з точки B зі швидкістю $\bar{V}_B$, що складає кут α з горизонтальною віссю, тоді початкові умови матимуть вигляд

при $t = t_0 = 0$, $x = x_B = 0$; $y = y_B = 0$;

$$\dot{x}_B = V_B\cos\alpha; \quad \dot{y}_B = V_B\sin\alpha. \tag{1.23}$$

Отримані початкові умови (1.23) підставимо відповідно в перші (1.20) та другі (1.22) інтеграли задачі і визначимо:

$$c_3 = V_B\cos\alpha; \quad c_4 = V_B\sin\alpha;$$

$$c_5 = 0; \qquad c_6 = 0. \tag{1.24}$$

Підставляючи отримані значення сталих інтегрування (1.24) в рівняння (1.22), отримаємо закон руху матеріальної точки на ділянці BC:

$$x = V_B t\cos\alpha;$$

$$y = \frac{1}{2}gt^2 + V_B t\sin\alpha. \tag{1.25}$$

Коли матеріальна точка досягає точки C, маємо

$$t = T, \quad x = d, \quad y = h. \tag{1.26}$$

Підставляючи умови (1.26) в рівняння руху (1.25), отримаємо:

$$d = V_B T\cos\alpha; \tag{1.27}$$

$$h = \frac{1}{2}gT^2 + V_B T\sin\alpha. \tag{1.28}$$

Час руху T матеріальної точки на ділянці BC визначаємо з (1.27), який з урахуванням числових значень величин дорівнюватиме:

$$T = \frac{d}{V_B\cos\alpha} = 1{,}2(c). \tag{1.29}$$

Висоту h знаходимо з (1.28), для якої після підстановки числових значень величин, маємо

$$h = 15{,}05\,м.$$

Швидкість, яку матиме матеріальна точка, досягнувши положення C визначатимемо з рівностей (1.20) з урахуванням знайдених значень сталих інтегрування (1.24) для моменту часу $t = T$:

$$\dot{x} = V_{Cx} = V_B\cos\alpha;$$

$$\dot{y} = V_{Cy} = gT + V_B\sin\alpha, \tag{1.30}$$

де V_{Cx} і V_{Cy} – проекції вектора швидкості $\bar{V}_C$ на координатні осі. Тоді величина цієї швидкості

$$V_C = \sqrt{V_{Cx}^2 + V_{Cy}^2}. \tag{1.31}$$

Після підстановки числових значень величин в (1.30), а потім в (1.31), матимемо:

$$V_C = 19{,}62\,м/с.$$

<u>**Відповідь:**</u> $f = 0{,}35$; $h = 15{,}05\,м$; $V_C = 19{,}62\,м/с$.

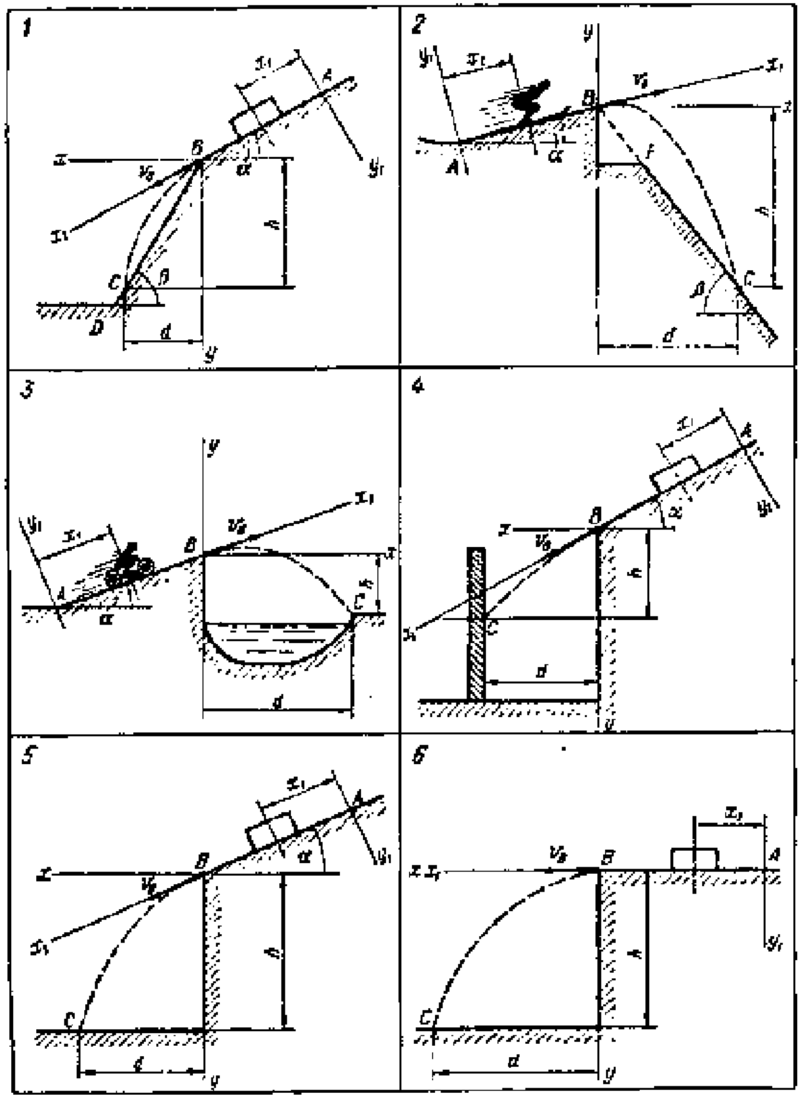

Рис. 1.2

Таблиця 1

Схема №	Номер варі-анта	Задано											Визна-чити
		α	β	V_A, м/с	f	l, м	m, кг	τ, с	h, м	d, м	V_B, м/с	P, кН	
1	1	30	60	0	0,2	10	–	–	–	–	–	–	τ, h
	2	15	45	2	0,2	–	–	–	4	–	–	–	l, d
	3	30	60	2,5	$f \neq 0$	8	–	–	–	10	–	–	V_B, τ
	4	–	60	0	0	9,8	–	2	–	–	–	–	α, T
	5	30	45	0	–	9,8	–	3	–	–	–	–	f, V_C
2	6	20	30	–	0,1	–	–	0,2	40	–	–	–	l, V_C
	7	15	45	16	0,1	5	–	–	–	–	–	–	V_B, T
	8	–	60	21	0	–	–	0,3	–	–	20	–	α, d
	9	15	45	–	0,1	–	–	0,3	$30\sqrt{2}$	–	–	–	V_B, V_A
	10	15	60	12	0	–	–	–	–	50	–	–	τ, V_B
3	11	30	–	0	–	40	–	–	–	3	4,5	$P \neq 0$	τ, h
	12	30	–	–	–	40	–	–	1,5	–	4,5	0	V_A, d
	13	30	–	0	–	–	400	20	1,5	3	–	–	P, l
	14	30	–	0	–	40	400	–	–	5	–	2,2	V_B, V_C
	15	30	–	0	–	50	–	–	2	4	–	2	T, m
4	16	30	–	1	0,2	3	–	–	–	2,5	–	–	h, T
	17	45	–	–	–	6	–	1	6	–	$2V_A$	–	d, f
	18	30	–	0	0,1	2	–	–	–	3	–	–	h, τ
	19	15	–	–	$f \neq 0$	3	–	1,5	–	2	3	–	V_A, h
	20	45	–	0	0,3	–	–	–	4	2	–	–	l, τ
5	21	30	–	1	0,1	–	–	1,5	10	–	–	–	V_B, d
	22	45	–	0	–	10	–	2	–	8	–	–	f, h
	23	–	–	0	0	9,8	–	2	20	–	–	–	α, T
	24	30	–	0	0,2	10	–		–	12	–	–	τ, h
	25	30	–	0	0,2	6	–	–	4,5	–	–	–	τ, V_C
6	26	–	–	7	0,2	8	–	–	20	–	–	–	d, V_C
	27	–	–	4	0,1	–	–	2	–	2	–	–	V_B, h
	28	–	–	–	0,3	3	–	–	5	–	3	–	V_A, τ
	29	–	–	3	–	2,5	–	–	20	–	1	–	f, d
	30	–	–	–	0,25	4	–	–	5	3	–	–	V_A, τ